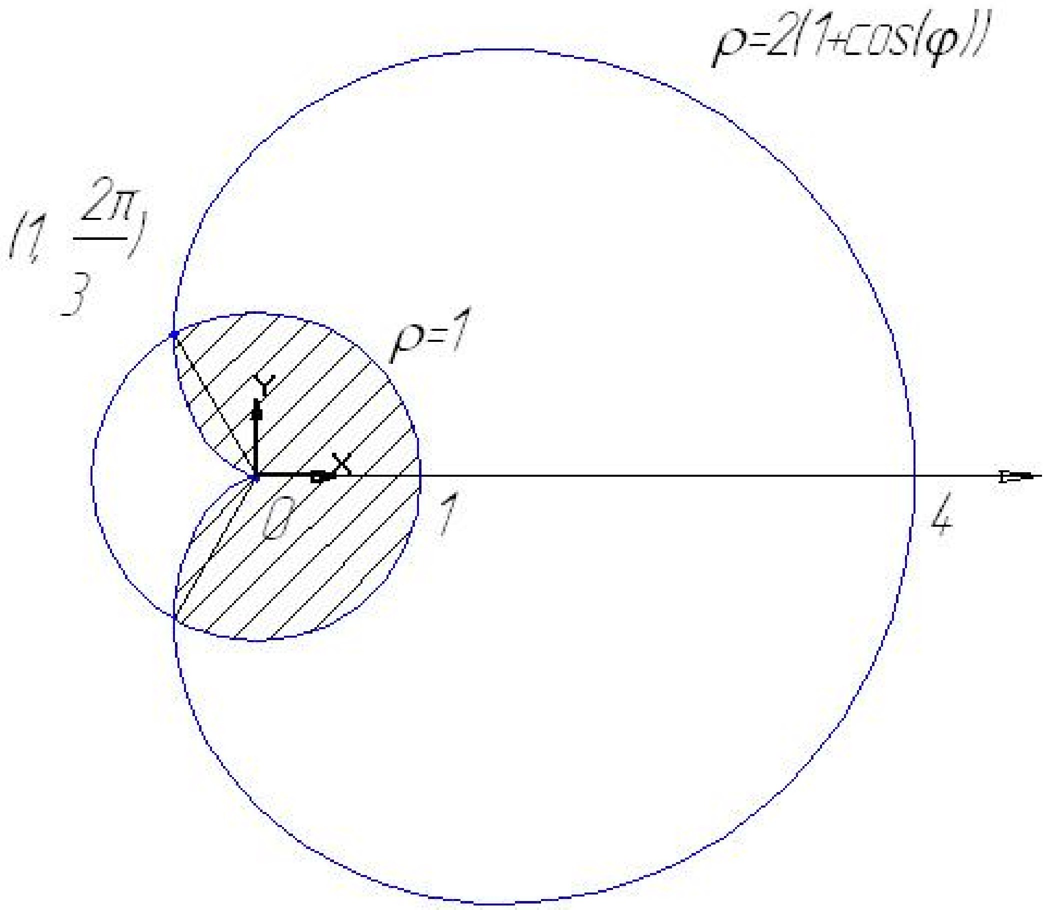
1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ и $\rho = 1$ и расположенной внутри каждой из них.

Функции $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ и $\rho = 1$ являются чётными относительно φ, следовательно, фигура симметрична относительно полярной оси.

Линии $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ и $\rho = 1$ пересекаются в точках $\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(1, \frac{4\pi}{3}\right)$



Искомая площадь равна

$$S = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{2\pi}{3}} 1^2\,d\varphi + \frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\big(2(1+\cos\varphi)\big)^2\,d\varphi\right) = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 1d\varphi + 4\cdot\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi + 4\cdot\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi + 6\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} d\varphi + 8\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi + 2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \varphi\Big|_{0}^{\frac{2\pi}{3}} + 6\varphi\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} + 8\sin\varphi\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} + \sin 2\varphi\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{3} - 0\right) + 6\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + 8\left(\sin\pi - \sin\frac{2\pi}{3}\right) + 2\left(\sin 2\pi - \sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} + 2\pi + 8\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{8}{3}\pi - \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

Ответ:

$$\frac{8}{3}\pi - \frac{7\sqrt{3}}{2}$$