Найти площадь поверхности, образованной вращением петли кривой

$$y^2 = \frac{x}{9a} \cdot (3a - x)^2$$

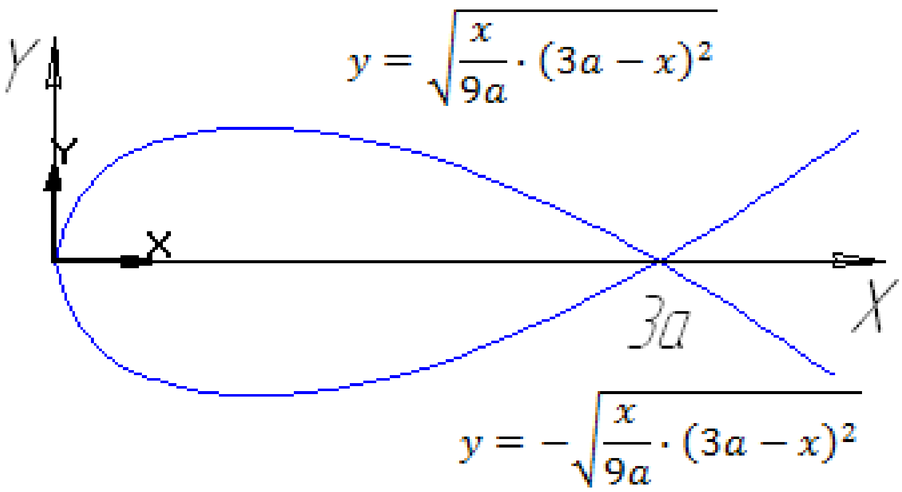
вокруг оси OX. $(a > 0)$

Две линии

$$y = \sqrt{\frac{x}{9a} \cdot (3a - x)^2}$$

$$y = -\sqrt{\frac{x}{9a} \cdot (3a - x)^2}$$

пересекают ось OX в точках $(0,\ 0)$ и $(3a,\ 0)$



Если $x < 3a$ то уравнение верхней кривой можно записать в виде

$$y = \sqrt{\frac{x}{9a}} \cdot (3a - x)$$

Найдём производную этой функции:

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{x}{9a}} \cdot (3a - x)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9ax}} \cdot (3a - x) - \sqrt{\frac{x}{9a}}$$

Искомая площадь поверхности равна:

$$S = 2\pi \int_0^{3a} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{\frac{x}{9a}} \cdot (3a - x) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9ax}} \cdot (3a - x) - \sqrt{\frac{x}{9a}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{\frac{x}{9a}} \cdot (3a - x) \sqrt{1 + \frac{(3a-x)^2}{36ax} + \frac{x}{9a} - \frac{3a-x}{9a}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{3a} (3a - x) \sqrt{\frac{x}{9a} + \frac{(3a-x)^2}{324a^2} + \frac{x^2}{81a^2} - \frac{x(3a-x)}{81a^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{3a} (3a - x) \sqrt{\frac{36ax}{324a^2} + \frac{(3a-x)^2}{324a^2} + \frac{4x^2}{324a^2} - \frac{4x(3a-x)}{324a^2}}\, dx =$$

$$\frac{2\pi}{18a} \int_0^{3a} (3a - x)\sqrt{36ax + 9a^2 + x^2 - 6ax + 4x^2 - 12ax + 4x^2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{9a} \int_0^{3a} (3a - x)\sqrt{9x^2 + 18ax + 9a^2}\, dx = \frac{\pi}{9a} \int_0^{3a} (3a - x)3\sqrt{x^2 + 2ax + a^2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{3a} \int_0^{3a} (3a - x)\sqrt{(x+a)^2}\, dx = \frac{\pi}{3a} \int_0^{3a} (3a - x)(x + a)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{3a} \int_0^{3a} (3ax - x^2 + 3a^2 - ax)\, dx = \frac{\pi}{3a} \int_0^{3a} (2ax - x^2 + 3a^2)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{3a} \left(ax^2 - \frac{1}{3}x^3 + 3a^2x \right) \Bigg|_{0}^{3a} =$$

$$= \frac{\pi}{3a} \left(\left(a \cdot (3a)^2 - \frac{1}{3}(3a)^3 + 3a^2 3a \right) - \left(a \cdot 0^2 - \frac{1}{3}0^3 + 3a^2 0 \right) \right) =$$

$$\frac{\pi}{3a}(9a^3 - 9a^3 + 9a^3) = \frac{\pi}{3a} \cdot 9a^3 = 3\pi a^2$$

Ответ : $3\pi a^2$