Задача 1.

Найти частное решение для указанных начальных условий.

$$x^2y'' = (y')^2 + xy' - x^2; \qquad y(1) = -\frac{1}{2}; \quad y'(1) = -3;$$

Это уравнение не содержит искомой функции y. Введём замену переменной:

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \quad \to \quad y'' = \frac{dp}{dx}$$

Получим дифференциальное уравнение первой степени:

$$x^2\frac{dp}{dx} = p^2 + xp - x^2$$

Поделив обе части уравнения на x^2 , получим однородное уравнение:

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{p}{x}\right)^2 + \frac{p}{x} - 1$$

Сделаем замену переменного:

$$t = \frac{p}{x} \quad \to \qquad p = t \cdot x, \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot x + t$$

Получим уравнение:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x + t = t^2 + t - 1$$

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = t^2 - 1$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln C_1$$

где C_1 - константа

$$\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = 2\cdot\ln|x| + \ln C_1 = \ln(x^2) + \ln C_1 = \ln(C_1x^2)$$

$$\frac{t-1}{t+1} = C_1x^2$$

$$\frac{\frac{p}{x}-1}{\frac{p}{x}+1} = C_1x^2$$

$$\frac{p-x}{p+x} = C_1x^2$$

$$p - x = C_1x^2(p+x)$$

$$p(1 - C_1x^2) = C_1x^3 + x$$

$$p = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1x^3 + x}{1 - C_1x^2}$$

Учитывая начальное условие $y'(1) = -3$, найдём константу C_1

$$-3 = \frac{C_1 1^3 + 1}{1 - C_1 1^2}, \qquad -3(1 - C_1) = C_1 + 1, \qquad -3 + 3C_1 = C_1 + 1, \qquad 2C_1 = 4, \qquad C_1 = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + x}{1 - 2x^2}$$

$$y = \int \frac{2x^3 + x}{1 - 2x^2}\,dx$$

Выделим из дроби целую часть и представим дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^3 + x}{1 - 2x^2} = -x + \frac{2x}{1 - 2x^2} = -x + \frac{A}{1 - \sqrt{2}x} + \frac{B}{1 + \sqrt{2}x} = -x + \frac{(A + B) + \left(\sqrt{2}A - \sqrt{2}B\right)x}{1 - 2x^2}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \sqrt{2}A - \sqrt{2}B = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ B = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{2x^3+x}{1-2x^2} = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{1-\sqrt{2}x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}x} = -x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$y = \int\frac{2x^3+x}{1-2x^2}dx = -\int xdx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + C_2$$

где C_2 – константа

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-\frac{1}{2}\right| + C_2$$

Учитывая начальное условие $y(1) = -\frac{1}{2}$, найдём константу C_2

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|1^2-\frac{1}{2}\right| + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x^2-1}{2}\right| - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(\ln|2x^2-1| - \ln 2) - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|2x^2-1|$$

Ответ:

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|2x^2-1|$$