Задача 2.

Найти общее решение уравнения:

$$y''(e^y - 1) = (y')^2$$

Уравнение не содержит независимой переменной x.

Введём замену переменной $p = p(y) = y'$ - функция от y

$$y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$p\frac{dp}{dy}(e^y - 1) = p^2$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{e^y - 1}$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{e^y - 1}$$

Вычислим интеграла справа:

$$\int \frac{dy}{e^y - 1} = \left\{ \quad t = e^y - 1 \quad \to \quad y = \ln(t+1) \quad , \quad dy = \frac{dt}{t+1} \right\} = \int \frac{dt}{t(t+1)} =$$

$$= \int \frac{(t+1-t)dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t| - \ln|t+1| + \ln C_1 =$$

$$= \ln|e^y - 1| - \ln|e^y - 1 + 1| + \ln C_1 = \ln|e^y - 1| - \ln|e^y| + \ln C_1 = \ln\left|\frac{e^y - 1}{e^y}\right| + \ln C_1$$

Подставляем полученное значение в формулу

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{e^y - 1}$$

$$\ln|p| = \ln\left|\frac{e^y - 1}{e^y}\right| + \ln C_1$$

$$p = \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{e^y - 1}{e^y}$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{e^y}{e^y - 1} dy = C_1 dx$$

$$\int \frac{e^y}{e^y - 1} dy = \int C_1 dx$$

$$\int \frac{(e^y - 1 + 1)}{e^y - 1} dy = C_1 x + C_2$$

$$\int dy + \int \frac{dy}{e^y - 1} = C_1 x + C_2$$

Значение второго интеграла вычислено ранее:

$$\int \frac{dy}{e^y - 1} = \ln\left|\frac{e^y - 1}{e^y}\right| + \ln C_1$$

Подставляя это значение в формулу, получим:

$$y + \ln\left|\frac{e^y - 1}{e^y}\right| = C_1 x + C_2$$

$$y + \ln|e^y - 1| - \ln e^y = y + \ln|e^y - 1| - y = \ln|e^y - 1| = C_1 x + C_2$$

$$\ln|e^y - 1| = C_1 x + C_2$$

$$e^y - 1 = e^{C_1 x + C_2} \quad ; \quad e^y = 1 + e^{C_1 x + C_2}; \quad y = \ln(1 + e^{C_1 x + C_2})$$

Ответ:

$y = \ln(1 + e^{C_1 x + C_2})$, где C_1 и C_2 – константы.