Задача 3.

Записать общее решение однородного уравнения. Указать вид частного решения неоднородного уравнения (без вычисления коэффициентов).

$$y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = x^2e^x + \sin x + x^2 - xe^{-x}\cos x + 1$$

Однородному уравнению $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 0$ соответствует характеристическое уравнение:

$$k^4 - 2k^3 + 2k - 1 = 0$$

$$(k^4 - 1) - 2k(k^2 - 1) = 0, \quad (k^2 + 1)(k^2 - 1) - 2k(k^2 - 1) = 0, \quad (k^2 - 1)(k^2 - 2k + 1) = 0$$

$$(k - 1)(k + 1)(k - 1)^2 = 0 \qquad , \qquad (k + 1)(k - 1)^3 = 0$$

Получили корень $k = -1$ кратности 1 и корень $k = 1$ кратности 3

$$k_1 = -1, \quad k_2 = k_3 = k_4 = 1$$

Общее решение однородного уравнения $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 0$ имеет вид:

$$y_o = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^x + C_4x^2e^x$$

Поскольку корень $k = 1$ имеет кратность 3, то частное решение неоднородного уравнения $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = x^2e^{x^2}$ ищем в виде:

$$y_1 = (Ax^2 + Bx + C)x^3e^x$$

Поскольку корень $k = i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = \sin x$ ищем в виде:

$$y_2 = D\sin x + E\cos x$$

Поскольку корень $k = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = x^2 + 1$ ищем в виде:

$$y_3 = Fx^2 + Gx + H$$

Поскольку корень $k = -1 + i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = -xe^{-x}\cos x$ ищем в виде:

$$y_4 = (Mx + N)e^{-x}\sin x + (Px + Q)e^{-x}\cos x$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = x^2e^x + \sin x + x^2 - xe^{-x}\cos x + 1$$

$$y_{\text{чн}} = (Ax^2 + Bx + C)x^3e^x + D\sin x + E\cos x + Fx^2 + Gx + H + (Mx + N)e^{-x}\sin x + (Px + Q)e^{-x}\cos x$$

Ответ:

$$y_o = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^x + C_4x^2e^x$$

$$y_{\text{чн}} = (Ax^2 + Bx + C)x^3e^x + D\sin x + E\cos x + Fx^2 + Gx + H + (Mx + N)e^{-x}\sin x + (Px + Q)e^{-x}\cos x$$