Задача 5

Найти общее решение линейного неоднородного уравнения по данному частному решению y_1 соответствующего однородного уравнения.

$$x^2(x^2+1)y''-2xy'+2y=\frac{2x^3}{1+x^2}; \quad y_1=x$$

Перепишем уравнение в виде

$$y''-\frac{2}{x(x^2+1)}y'+\frac{2}{x^2(x^2+1)}y=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

На основании формулы Лиувилля

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int\frac{2}{x(x^2+1)}dx}}{y_1^2}dx=x\int\frac{e^{-\int\frac{-2}{x(x^2+1)}dx}}{x^2}dx$$

$$\frac{2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} \quad \begin{cases}A+B=0\\ C=0\\ A=-2\end{cases} \quad \begin{cases}A=2\\ B=-2\\ C=0\end{cases}$$

$$\frac{2}{x(x^2+1)}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2+1}$$

$$-\int\frac{-2}{x(x^2+1)}dx=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2xdx}{x^2+1}=2\ln|x|-\ln(x^2+1)=\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$$

$$y_2=x\int\frac{e^{-\int\frac{-2}{x(x^2+1)}dx}}{x^2}dx=x\int\frac{e^{\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)}}{x^2}dx=x\int\frac{\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)}{x^2}dx=x\int\frac{dx}{x^2+1}=x\cdot arctg(x)$$

Общее решение однородного уравнения $x^2(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$ имеет вид :

$$y_o=C_1\,x+C_2\,x\,arctg(x)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения $x^2(x^2+1)y''-2xy'+2y=\frac{2x^3}{1+x^2}$ ищем в виде

$$y_{чн}=C_1(x)\,x+C_2(x)\,x\,arctg(x)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - некоторые функции.

$$y_{чн}'=C_1(x)'x+C_1(x)+C_2(x)'\,x\,arctg(x)+C_2(x)\left(arctg(x)+\frac{x}{x^2+1}\right)$$

Возьмём такие $C_1(x)$ и $C_2(x)$, что

$$C_1(x)'x + C_2(x)'\, x\, arctg(x) = 0$$

Тогда

$$y_{чн}{}' = C_1(x) + C_2(x)\left(arctg(x) + \frac{x}{x^2+1}\right)$$

Отсюда находим

$$y_{чн}{}'' = C_1(x)' + C_2(x)'\left(arctg(x) + \frac{x}{x^2+1}\right) + C_2(x)\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}\right) =$$

$$= C_1(x)' + C_2(x)'\left(arctg(x) + \frac{x}{x^2+1}\right) + C_2(x)\left(\frac{2}{(x^2+1)^2}\right)$$

Подставим $y_{чн}$, $y_{чн}{}'$, $y_{чн}{}''$ в неоднородное уравнение $x^2(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = \frac{2x^3}{1+x^2}$

$$x^2(x^2+1)\left(C_1(x)' + C_2(x)'\left(arctg(x) + \frac{x}{x^2+1}\right) + C_2(x)\left(\frac{2}{(x^2+1)^2}\right)\right)$$
$$- 2x\left(C_1(x) + C_2(x)\left(arctg(x) + \frac{x}{x^2+1}\right)\right) + 2(C_1(x)\, x + C_2(x)\, x\, arctg(x))$$
$$= \frac{2x^3}{1+x^2}$$

$$C_1(x)' \cdot\ x^2(x^2+1) + C_2(x)' \cdot (\, x^2(x^2+1) arctg(x) + x^3) = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

$$C_1(x)' + C_2(x)'\left(arctg(x) + \frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Получили систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} C_1(x)'x + C_2(x)'\, x\, arctg(x) = 0 \\ C_1(x)' + C_2(x)'\left(arctg(x) + \frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \end{cases}$$

$$C_1(x)' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\, arctg(x) \\ \frac{2x}{(x^2+1)^2} & arctg(x) + \frac{x}{x^2+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x\, arctg(x) \\ 1 & arctg(x) + \frac{x}{x^2+1} \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{-2x^2\, arctg(x)}{(x^2+1)^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)} = -\frac{2\, arctg(x)}{x^2+1}$$

$$C_2(x)' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{2x}{(x^2+1)^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x\, arctg(x) \\ 1 & arctg(x) + \frac{x}{x^2+1} \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)} = \frac{2}{x^2+1}$$

Интегрируя, получим:

$$C_1(x) = -2\int \frac{arctg(x)}{x^2+1}dx = -\left(arctg(x)\right)^2$$

$$C_2(x) = 2\int \frac{1}{x^2+1}dx = 2\cdot\ arctg(x)$$

$$y_{чн} = C_1(x)\cdot y_1(x) + C_2(x)\cdot y_2(x)$$

$$y_{чн} = \left(-\left(arctg(x)\right)^2\right)\cdot\ x + \left(2\cdot\ arctg(x)\right)\cdot\ \left(x\ \cdot arctg(x)\right) = x\cdot\left(arctg(x)\right)^2$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$x^2(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

$$y = y_o + y_{чн}$$

$$y = C_1\,x + C_2\,x\,arctg(x) +\ x\cdot\left(arctg(x)\right)^2$$

Ответ:

$y = C_1\,x + C_2\,x\,arctg(x) +\ x\cdot\left(arctg(x)\right)^2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.